Etude d'une équation fonctionnelle

Notions abordées : les fonctions usuelles

L'objectif du problème est d'étudier les ensembles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ suivants :

$$\mathcal{E}=\left\{f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})/\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\right\}$$

$\mathcal{F}$ est la partie constituée des éléments f de $\mathcal{E}$ tels que :

f n'est pas la fonction identiquement nulle,

f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Partie I

1. Montrer que la fonction cosinus est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

2. On note ch la fonction cosinus hyperbolique et sh la fonction sinus hyperbolique.
Démontrer la formule : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \text{ch}(x+y)=\text{ch}\,x\,\text{ch}\,y+\text{sh}\,x\,\text{sh}\,y$.
En déduire que la fonction ch est dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

3. Soit f dans $\mathcal{E}$; montrer que pour tout réel α, la fonction f_α de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$x\mapsto f_\alpha(x)=f(\alpha x)$ est dans $\mathcal{E}$.

4. On fixe un élément f de $\mathcal{E}$.
En donnant à x et à y des valeurs particulières, prouver que :

4.a $f(0)$ vaut 0 ou 1.

4.b Si $f(0)=0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

4.c Si $f(0)=1$, alors f est une fonction paire.

Partie II

A. On fixe ici un élément f de $\mathcal{E}$ tel que $f(0)=1$.

1 Montrer que pour chaque $r>0$, on a :

1.a $\forall x\in\mathbb{R}, \displaystyle\int_0^r f(x+y)\,\mathrm{d}y=\int_x^{x+r} f(u)\,\mathrm{d}u$.

1.b $\forall x\in\mathbb{R}, 2f(x)\displaystyle\int_0^r f(y)\,\mathrm{d}y=\int_x^{x+r} f(u)\,\mathrm{d}u+\int_{x-r}^{x} f(v)\,\mathrm{d}v$.

2..a Montrer que l'on peut choisir $r>0$ de façon à rendre strictement positive la constante $\displaystyle\int_0^r f(y)\,\mathrm{d}y$.

Dans la suite de ce 2., on fixe un réel $r>0$ qui vérifie : $\displaystyle\int_0^r f(y)\,\mathrm{d}y>0$.

2.b En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2.c Montrer alors que f est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.d Prouver l'existence d'une constante $c>0$ telle que :
$\forall x\in\mathbb{R}, cf'(x)=f(x+r)-f(x-r)$.

3. En déduire l'existence d'une constante réelle λ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}, f''(x)=\lambda f(x)$.

B. On admet que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y''=\mu y$ sont les fonctions :
$x\mapsto\alpha\,\text{ch}\left(\sqrt{\mu}\,x\right)+\beta\,\text{sh}\left(\sqrt{\mu}\,x\right)$ lorsque $\mu>0$,

$x \mapsto \alpha\cos\left(\sqrt{-\mu}\,x\right)+\beta\sin\left(\sqrt{-\mu}\,x\right)$ lorsque $\mu<0$,

$x \mapsto \alpha.x+\beta$ lorsque $\mu=0$,

avec α,β des paramètres réels.

1. En déduire tous les éléments de $\mathcal{E}$ en exploitant I.4.c.
2. Donner tous les éléments de $\mathcal{F}$.

Partie III

On se propose d'étudier l'ensemble $\mathcal{F}$ par une méthode différente.

On pourra utiliser librement le résultat suivant :

Si a est un élément fixé de $\mathbb{R}^{+*}$ et si $D_a=\left\{a\frac{p}{2^q}/\,p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}\right\}$, tout réel est limite d'une suite d'éléments de D_a.

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. On pose $E=\{x>0/\,f(x)=0\}$.

A.

1. Montrer que $f(0)=1$ et que f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que E admet une borne inférieure que l'on note a.
3. Prouver que $f(a)=0$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire que $a>0$.
4. Montrer que : $\forall x\in[0,a[, f(x)>0$.

B. On pose $\omega=\frac{\pi}{2a}$, et on note g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: $x\mapsto\cos(\omega x)$.

1.a Soit $q\in\mathbb{N}$; montrer que : $f(\frac{a}{2^q})+1=2\left(f(\frac{a}{2^{q+1}})\right)^2$.

1.b En déduire, en raisonnant par récurrence sur q que : $\forall q\in\mathbb{N}, f(\frac{a}{2^q})=g(\frac{a}{2^q})$.

On démontrerait de même le résultat suivant que le candidat pourra utiliser librement :

si $q\in\mathbb{N}$ fixé : $\forall p\in\mathbb{N}, f(p\frac{a}{2^q})=g(p\frac{a}{2^q})$.

2. Prouver que : $\forall x\in D_a, f(x)=g(x)$.
3. En déduire que $f=g$.

C. En déduire tous les éléments de $\mathcal{F}$.

I. Correction

d'après Mines de Sup 2000 – Spécialité

Sans correction